# Η Συνδυαστική Βελτιστοποίηση και η χρήση αυτής στη Μοντελοποίηση Στρατιωτικών Εφαρμογών

του *Παπαρρίζου Κωνσταντίνου, Σιφαλέρα Άγγελου*


## Περίληψη

Η εργασία αυτή έχει ως στόχο μια σύντομη ενημέρωση στο επιστημονικό πεδίο της Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης και της Μαθηματικής μοντελοποίησης. Μια πληθώρα προβλημάτων από διαφορετικούς τομείς όπως η Πληροφορική, οι Τηλεπικοινωνίες, ο Κατασκευαστικός τομέας είναι δυνατόν να μοντελοποιηθούν και να επιλυθούν με χρήση Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης. Στην παρούσα εργασία, θα δοθεί βαρύτητα στην μελέτη διαφόρων περιπτώσεων από στρατιωτικές εφαρμογές. Τέλος, παρατίθενται πολλές πηγές ενημέρωσης σχετικά με την Μαθηματική Μοντελοποίηση και τη Συνδυαστική Βελτιστοποίηση τόσο σε διεθνή περιοδικά και συνέδρια, όσο και σε βιβλία αλλά και φυσικά στο Διαδίκτυο.


Λέξεις κλειδιά: Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα, Συνδυαστική Βελτιστοποίηση, Μαθηματική Μοντελοποίηση, Στρατιωτικές Εφαρμογές.

## 1. Εισαγωγή

Ιστορικά, ο όρος "Επιχειρησιακή Έρευνα" προέρχεται από την έρευνα (Research) για τη διεξαγωγή με τον βέλτιστο τρόπο των στρατιωτικών επιχειρήσεων (Operations). Με τη λήξη του Β΄ παγκοσμίου πολέμου, επεκτάθηκε η χρήση μεθόδων Επιχειρησιακής Έρευνας σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Ενδεικτικά μπορεί να αναφέρει κανείς εφαρμογές σε βιομηχανίες, τράπεζες, ασφάλειες, αγροτική παραγωγή, μεταφορές, τηλεπικοινωνίες, διαχείριση αποθεμάτων, επενδύσεις, χρηματο-οικονομική δοίκηση, μάρκετινγκ, τεχνικές κατασκευές, συντήρηση εξοπλισμού, κλπ. Η Επιχειρησιακή Έρευνα αποτελεί ένα ευρύ επιστημονικό πεδίο έρευνας, όπου χρησιμοποιούνται τεχνικές βελτιστοποίησης, προσομοίωσης αλλά και στοιχεία πιθανοτήτων και στατιστική. Για μια λεπτομερή μελέτη σε θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας, μπορεί κανείς να ανατρέξει στα βιβλία [1] και [2].

### 1.1 Εισαγωγή στη Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Η Συνδυαστική Βελτιστοποίηση αποτελεί ένα κλάδο της Βελτιστοποίησης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και στην Επιστήμη των Υπολογιστών, ο οποίος συνενώνει πολλά άλλα επιστημονικά πεδία, όπως της Επιχειρησιακής Έρευνας, της Αλγοριθμικής θεωρίας, της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, αλλά και της τεχνητής νοημοσύνης. Αλγόριθμοι Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης εφαρμόζονται για την επίλυση προβλημάτων που θεωρούνται αρκετά δύσκολα, λόγω του μεγάλου πλήθους των δυνατών συνδυασμών - λύσεων. Η επίλυση των προβλημάτων Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης επιτυγχάνεται με τη μείωση του συνόλου των εφικτών λύσεων, αλλά και με μια περισσότερο αποτελεσματική αναζήτηση.

Οι αλγόριθμοι Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης συνήθως εφαρμόζονται σε NP-hard προβλήματα. Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας, θεωρούνται από τα πιο δύσκολα από υπολογιστικής απόψεως και δεν είναι εύκολα επιλύσιμα. Παρ' όλα αυτά, κάποια "στιγμιότυπα" μικρού μεγέθους αυτών των προβλημάτων μπορούν να επιλυθούν σε πραγματικό χρόνο.

Η επιστημονική περιοχή της Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης, ασχολείται κυρίως με την επίλυση προβλημάτων που μοντελοποιούνται με ροές δικτύων. Η θεωρία ροών σε δίκτυα αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς κλάδους των Εφαρμο-

σμένων Μαθηματικών και της Επιχειρησιακής Έρευνας. Υπάρχει ένα μεγάλο εύρος καθημερινών εφαρμογών που μοντελοποιούνται με τη βοήθεια προβλημάτων Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης. Αυτό άλλωστε καταδεικνύει και τη σημαντική αξία αυτού του επιστημονικού πεδίου. Είναι σημαντικό να αναφερθεί το γεγονός ότι η Συνδυαστική Βελτιστοποίηση ασχολείται με προβλήματα αιτιοκρατικής Επιχειρησιακής Έρευνας και όχι προβλήματα που περιλαμβάνουν στοχαστικές διαδικασίες.

Τα δίκτυα και οι γράφοι, έχουν την ικανότητα να μοντελοποιούν αποτελεσματικά πολλά πρακτικά προβλήματα, πολύ μεγάλης κλίμακας. Η πρόοδος της έρευνας στο πεδίο αυτό, οδήγησε στην ανάπτυξη αποτελεσματικών αλγοριθμικών διαδικασιών για διακριτές μαθηματικές δομές, όπως για παράδειγμα τα δίκτυα. Με άλλα λόγια έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι για γραφήματα, οι οποίοι αξιοποιούν αυτές τις ιδιαίτερες διακριτές δομές δεδομένων. Ως αποτέλεσμα αυτοί οι αλγόριθμοι έχουν βελτιωμένη τόσο θεωρητική πολυπλοκότητα, αλλά και υπολογιστική συμπεριφορά.

Σήμερα τα προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας (ή αλλιώς και Διοικητικής Επιστήμης) είναι τόσο πολύπλοκα, ώστε είναι απαραίτητη η επίλυση με χρήση μαθηματικών μοντέλων αλλά και σύγχρονων λογισμικών πακέτων Η/Υ. Για παράδειγμα, το πρόβλημα της βέλτιστης γεωγραφικής διανομής αγαθών από κέντρα παραγωγής σε κέντρα κατανάλωσης (Transportation Problem) και η διακίνηση κυκλοφορίας οχημάτων μέσα σε ένα οδικό δίκτυο (Vehicle Routing Problem) αποτελούν κλασικές κατηγορίες προβλημάτων ροής σε δίκτυα.

Για την αποτελεσματικότερη επίλυση αυτών των πρακτικών προβλημάτων αναπτύχθηκε ένας νέος μαθηματικός κλάδος που προέκυψε από τις ιδιότητες των μαθηματικών δομών που χρησιμοποιήθηκαν για να προσομοιώσουν τα πραγματικά προβλήματα. Για μια πολύ πιο αναλυτική μελέτη της Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης, μπορεί κανείς να ανατρέξει στα βιβλία [3] και [4], ενώ για μια καταγραφή των πιο πρόσφατων ερευνητικών εξελίξεων στο άρθρο [5].

## 1.2 Εισαγωγή στην Μοντελοποίηση

Με τη χρήση διαφόρων τεχνικών, όπως για παράδειγμα η μαθηματική μοντελοποίηση για την ανάλυση πολύπλοκων προβλημάτων, η Επιχειρησιακή Έρευνα δίνει τη δυνατότητα στους διευθύνοντες (managers) να λάβουν αποτελεσματικές αποφάσεις και να γίνουν πιο παραγωγικοί. Για να επιλυθεί ένα πρακτικό πρόβλημα σε κάποιον χώρο όπως η Βιομηχανία, οι Κατασκευές κ.α., πρώτα αναπτύσσεται και εφαρμόζεται κάποιο μοντέλο. Υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα από τη χρήση μοντέλων για την επίλυση προβλημάτων. Κάποια από αυτά είναι ο έλεγχος εναλλακτικών σεναρίων, η εξοικονόμηση πόρων, και γενικότερα η ελαχιστοποίηση του κινδύνου.

Υπάρχουν διαφόρων ειδών μοντέλα. Κάποια από αυτά είναι φυσικά - εικονικά, π.χ. οι κατασκευές σε κλίμακα, οι οποίες αποτυπώνουν τη μορφή και την εικόνα κάποιου αντικειμένου. Παραδείγματα τέτοιων φυσικών μοντέλων αποτελούν τα μοντέλα από αυτοκίνητα τα οποία χρησιμοποιούνται και σε πειράματα παθητικής ασφάλειας. Άλλη μια κατηγορία είναι αυτή των αναλογικών μοντέλων. Σε αυτήν την κατηγορία υπάρχει αναλογία μεταξύ πραγματικού και βοηθητικού μέσου, π.χ. χάρτες, χιλιομετροδείκτης ή παλμογράφος. Για παράδειγμα, με τη βοήθεια ενός χάρτη μπορεί κανείς να βρεί τη βέλτιστη διαδρομή, αντί να χρειαστεί να διασχίσει στην πραγματικότητα όλες τις πιθανές διαδρομές.

Στην επίλυση κάθε σύνθετου πρακτικού προβλήματος χρησιμοποιούνται διάφοροι αλγόριθμοι ή άλλες τεχνικές. Το διευθυντικό στέλεχος, το οποίο έχει την ευθύνη της απόφασης, πριν την επίλυση με τη βοήθεια κάποιου λογισμικού, πρέπει να μετατρέψει την "λεκτική περιγραφή" του προβλήματος, σε ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων - ένα μαθηματικό μοντέλο.

Στην παρούσα εργασία θα αναφερθούμε αποκλειστικά στα μαθηματικά μοντέλα, τα οποία χρησιμοποιούν μαθηματικά σύμβολα. Τα μαθηματικά μοντέλα κατατάσ-

σονται αναλόγως τον σκοπό τους ή τη μέθοδο ανάλυσης τους. Ακόμη διακρίνονται σε στοχαστικά ή προσδιοριστικά, αναλόγως αν ενσωματώνουν αβεβαιότητα ή όχι αντίστοιχα. Τέλος, υπάρχουν τόσο εξειδικευμένα όσο και γενικευμένα μοντέλα, αναλόγως του εύρους των εφαρμογών που αυτά επιλύουν.

Όλα τα μαθηματικά μοντέλα αποτελούνται από κάποια βασικά στοιχεία. Αυτά είναι οι μεταβλητές απόφασης (decision variables), το κριτήριο απόδοσης (performance measure), η αντικειμενική συνάρτηση (objective function), οι παράμετροι (parameters), οι περιορισμοί (constraints) και η εφικτότητα του μοντέλου (feasibleness). Είναι πολύ σημαντικό, ένα μοντέλο να είναι απλό, πλήρες, εύχρηστο αλλά και προσαρμοστικό. Μια πληθώρα εφαρμογών όπως η κατάρτιση επενδυτικού χαρτοφυλακίου, μίξη πρώτων υλών και διαχείρισης αποθεμάτων, μοντελοποιούνται με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων Γραμμικής Βελτιστοποίησης.

Θα δοθεί ένα απλό παράδειγμα μοντελοποίησης ενός προβλήματος που προκύπτει και στις Ένοπλες Δυνάμεις. Οι ασθενείς που νοσηλεύονται σε στρατιωτικό (και όχι μόνο) νοσοκομείο πρέπει να τρέφονται με συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές. Σε αυτήν την περίπτωση, στόχος είναι ο προσδιορισμός των ποσοτήτων διαφόρων ειδών διατροφής προς κατανάλωση (diet problem) με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Μία από τις πρώτες εργασίες που ασχολήθηκαν με τον προγραμματισμό του διατροφολογίου είναι η [6].

Έστω ότι ο παρακάτω Πίνακας 1 περιέχει τις ελάχιστες απαιτήσεις διατροφής (mg) ανά ουσία. Επίσης δίνονται η περιεκτικότητα των τροφών στις αντίστοιχες ουσίες (mg/100mg), αλλά και το κόστος τους (€/100mg). Φυσικά το πραγματικό πρόβλημα θα μπορούσε να είναι πολύ πιο σύνθετο, αφού οι δυνατές επιλογές σε είδη τροφής είναι πολλές περισσότερες από τις αναφερόμενες (π.χ. ψάρια, κρέας, κ.α.), αλλά και οι απαραίτητες θρεπτικές ουσίες πολλές επιπλέον (π.χ. ασβέστιο, βιταμίνες A, C, κ.λ.π). Επιπρόσθετα και το κοστολόγιο θα μπορούσε να είναι αρκετά διαφορετικό λόγω προμηθευτών. Παρ' όλα αυτά το παράδειγμα έχει απλουστευθεί κατάλληλα για να είναι εύκολα κατανοητό, δίχως περιορισμό της γενικότητας.

| | Διατροφικά είδη ανά 100gr | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Σίδηρος (mg) | Πρωτείνες (g) | Υδατάνθρακες (g) | Λιπαρά (g) | Κόστος (€) |
| 1° είδος τροφής (π.χ. ζυμαρικά) | 1.1 | 5.0 | 30.1 | 0.5 | 0.14 |
| 2° είδος τροφής (π.χ. ορεκτικά) | 2.1 | 24.1 | 59.0 | 0.84 | 0.2 |
| 3° είδος τροφής (π.χ. δημητριακά) | 10.5 | 18.6 | 21.6 | 49.1 | 0.5 |
| 4° είδος τροφής (π.χ. γλύκισμα) | 1.1 | 7.7 | 56.9 | 32.3 | 0.9 |
| Ελάχιστες απαιτήσεις διατροφής | 8.7 | 60 | 150 | 70 | |

Πίνακας 1. Παράδειγμα μοντελοποίησης με το πρόβλημα της διαίτης.

Κατά τη μοντελοποίηση πρέπει να δοθούν απαντήσεις σε συγκεκριμένα ερωτήματα, όπως τα εξής: i) Ποιος είναι ο λήπτης της απόφασης?, ii) Ποιοι είναι οι πόροι? iii) Είναι σε ανεπάρκεια κάποιοι πόροι? iii) Ποιος είναι ο στόχος της επιχείρησης? iv) Ποιές είναι οι μεταβλητές απόφασης? v) Ποιοι είναι οι περιορισμοί του προβλήματος?

Στο παράδειγμα μας ο λήπτης της απόφασης είναι η διεύθυνση του στρατιωτικού νοσοκομείου. Οι πόροι είναι τα είδη τροφής, ενώ ο στόχος - κριτήριο βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους. Η απόφαση που πρέπει να πάρουμε είναι πόση ποσότητα από κάθε είδος τροφής πρέπει να αγοραστεί. Άρα την (άγνωστη) ποσότητα από κάθε τροφή, θα την μοντελοποιήσουμε με μια μεταβλητή. Προφανώς οι περιορισμοί του προβλήματος προκύπτουν από τις ελάχιστες απαιτήσεις διατροφής που πρέπει να τηρούνται για τους ασθενείς του νοσοκομείου. Για να διαμορφώσουμε το πρόβλημα ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού, ορίζουμε να είναι

$x_1$ = το πλήθος των 100 γραμμαρίων ζυμαρικών

$x_2$ = το πλήθος των 100 γραμμαρίων

οσπρίων
$x_3$ = το πλήθος των 100 γραμμαρίων δημητριακών
$x_4$ = το πλήθος των 100 γραμμαρίων γλυκού

Η αντικειμενική συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος του γεύματος είναι $z = 0.14x_1 + 0.2x_2 + 0.5x_3 + 0.9x_4$. Οι περιορισμοί του προβλήματος προκύπτουν από τις ελάχιστες απαιτήσεις πρωτεϊνών, υδατανθράκων κ.λ.π που πρέπει να λαμβάνονται κατά τη διάρκεια του γεύματος:

$$1.1x_1 + 2.1x_2 + 10.5x_3 + 1.1x_4 \geq 8.7 \text{ (σίδηρος)}$$
$$5x_1 + 24.1x_2 + 18.6x_3 + 7.7x_4 \geq 60 \text{ (πρωτεΐνες)}$$
$$30.1x_1 + 59x_2 + 21.6x_3 + 56.9x_4 \geq 150 \text{ (υδατάνθρακες)}$$
$$0.5x_1 + 0.84x_2 + 49.1x_3 + 32.3x_4 \geq 70 \text{ (λιπαρά)}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Η βέλτιστη λύση για το παραπάνω πρόβλημα είναι η $x_1 = 0$, $x_2 = 2.03$, $x_3 = 1.39$, $x_4 = 0$, με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (κόστος) $z = 1.10$.

Πρέπει να τονιστεί για μια ακόμη φορά ότι αυτό το παράδειγμα είναι μόνο ενδεικτικό, καθώς οι πραγματικοί περιορισμοί μπορεί να είναι αρκετά διαφορετικοί, αναλόγως την επιθυμητή δίαιτα. Για μια εμβάθυνση στη μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων, μπορεί κανείς να διαβάσει τα βιβλία [7] και [8].

## 2. Εφαρμογές της Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης στις Ένοπλες Δυνάμεις

Υπάρχει μια μεγάλη πληθώρα εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας στο χώρο των Ενόπλων Δυνάμεων. Ενδεικτικά, μπορούν να αναφερθούν οι παρακάτω εφαρμογές, (μέσα σε παρένθεση αναγράφεται το αντίστοιχο μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση).

- Βέλτιστη Κατανομή Περιορισμένων Πόρων (Γραμμικό Πρόβλημα)
- Διαχείριση Ανθρώπινου Δυναμικού (Πρόβλημα Αντιστοίχισης)
- Πρόβλημα Μεταφοράς Υλικών και Εφοδίων (Πρόβλημα Μεταφοράς, Ροής Ελάχιστου Κόστους, Ελάχιστων Δρόμων)

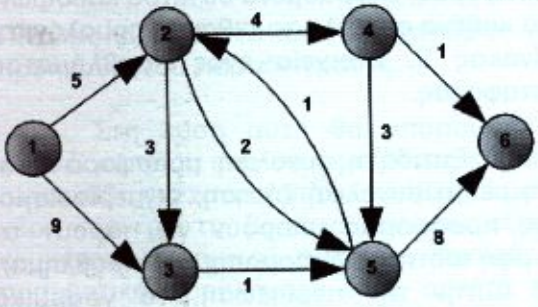
Μια από τις πιο σημαντικές υποπεριοχές της Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης, είναι και η Δικτυακή Βελτιστοποίηση (Network Optimization). Πολλές εφαρμογές μοντελοποιούνται με τη βοήθεια των γράφων - δικτύων. Ένα δίκτυο αποτελείται από μία συλλογή κόμβων (nodes) οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με ακμές ή και τόξα (arcs). Διαμέσου των ακμών μπορούν να "ρέουν" διάφορα υλικά ή προϊόντα. (π.χ. μεταφορικά δίκτυα, τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, δίκτυα διανομής, κ.λ.π.). Ως κόμβους μπορούμε να θεωρήσουμε είτε πόλεις, είτε στάσεις μεταφορικών μέσων, υπολογιστές, τηλεπικοινωνιακά κέντρα, κ.λ.π. Τέλος οι ακμές είναι δυνατόν να μοντελοποιούν δρόμους, γραμμές μετρό, τηλεπικοινωνιακά καλώδια, αγωγούς ύδρευσης, κ.λ.π. Στις επόμενες υποενότητες ακολουθούν κάποια παραδείγματα μοντελοποίησης εφαρμογών με τη βοήθεια της θεωρίας ροών σε δίκτυα. Για μια πιο αναλυτική περιγραφή της μοντελοποίησης πραγματικών προβλημάτων με τη βοήθεια της Δικτυακής Βελτιστοποίησης, μπορεί κανείς να συμβουλευτεί τα βιβλία [9] και [10].

### 2.1. Εφαρμογή μοντελοποίησης για το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path Problem)

Υπάρχουν δυο προβλήματα ελάχιστων δρόμων. Στο πρώτο, ζητείται ένας προσανατολισμένος δρόμος ελάχιστου μήκους που συνδέει ένα συγκεκριμένο κόμβο εκκίνησης (αφετηρία) με ένα άλλο κόμβο τερματισμού (προορισμός), ή αλλιώς και single-source shortest path problem. Στο δεύτερο πρόβλημα ζητούνται οι ελάχιστοι προσανατολισμένοι δρόμοι από ένα διακεκριμένο κόμβο εκκίνησης (αφετηρία) προς όλους τους υπόλοιπους κόμβους, ή αλλιώς και all-pairs shortest path problem. Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ο στόχος είναι ο εντοπισμός της βέλτιστης διαδρομής ("συ-

ντομότερης") με τον ελάχιστο συνολικό χρόνο ταξιδιού.

Για παράδειγμα, έστω ότι στο δίκτυο του Σχήματος 1, μοντελοποιούμε ένα οδικό δίκτυο, όπου κάθε τόξο αντιστοιχεί σε δρόμο, ενώ κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε μια στρατιωτική μονάδα που βρίσκεται π.χ. σε διαφορετική πόλη. Οι αριθμοί δίπλα στα τόξα, παριστάνουν τις χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των αντιστοίχων κόμβων (π.χ. σε εκατοντάδες χιλιόμετρα). Βέβαια το γεγονός ότι υπάρχουν τόξα δηλώνει και ότι οι δρόμοι θα είναι μιας κατεύθυνσης, αλλά το πρόβλημα γενικεύεται εύκολα και με τη χρήση ακμών, για την αναπαράσταση δρόμων και των δύο κατευθύνσεων. Ας θεωρήσουμε για τις ανάγκες του παραδείγματος μας, ότι από τον κόμβο 1 πρέπει να υπολογιστούν οι ελάχιστες αποστάσεις προς όλους τους υπολοίπους κόμβους.




Σχήμα 1. Μοντελοποίηση με το πρόβλημα της εύρεσης ελάχιστων δρόμων.

Ένα σημαντικό κομμάτι της διαδικασίας της επίλυσης, είναι η μοντελοποίηση του πραγματικού προβλήματος. Αφού λοιπόν έχει ολοκληρωθεί η μοντελοποίηση, τώρα πια έχουμε να δουλέψουμε με ένα μαθηματικό μοντέλο. Για την επίλυση του προβλήματος των ελαχίστων δρόμων έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αποτελεσματικοί αλγόριθμοι στη διεθνή βιβλιογραφία, όπως για παράδειγμα ο αλγόριθμος του Johnson που περιγράφεται στην εργασία [11]. Η εφαρμογή των αλγορίθμων, μας εγγυάται ότι θα προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση. Πρέπει όμως να επισημανθεί το γεγονός, ότι πιθανή λανθασμένη μοντελοποίηση του προβλήματος (π.χ. παράλειψη κόμβου, ή λάθος εκτίμηση στην χιλιομετρική απόσταση μεταξύ δύο κόμβων), θα οδηγήσει και σε λανθασμένα αριθμητικά αποτελέσματα. Είναι δηλαδή σημαντικό να τροφοδοτηθεί ο αλγόριθμος με σωστά δεδομένα εισόδου, ώστε το αποτέλεσμα να είναι το βέλτιστο για το πραγματικό μας πρόβλημα.

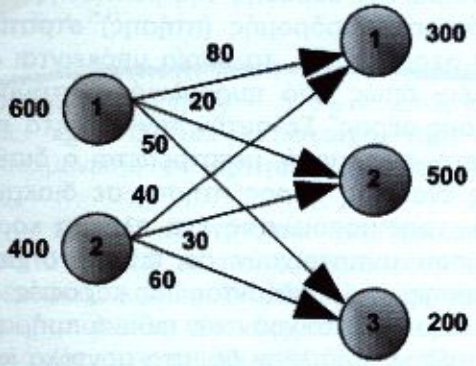
Υπάρχουν και αρκετές άλλες παραλλαγές του προηγούμενου προβλήματος. Μία από αυτές είναι το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής με περιορισμούς (Constrained Shortest Path Problem - CSPP). Εφαρμογές αυτού του προβλήματος μελετούνται από διάφορους ερευνητές για τη δρομολόγηση στρατιωτικών αεροσκαφών. Στις εργασίες [12] και [13], αναλύεται το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης (συντομότερης) διαδρομής (πτήσης) στρατιωτικών αεροσκαφών, τα οποία υπόκεινται σε απειλές, όπως από πυραυλικά συστήματα εδάφους-αέρος. Σε αυτήν την -αρκετά πιο σύνθετη- εφαρμογή, μετατρέπεται ο διαθέσιμος εναέριος χώρος πτήσης σε διακριτό χώρο, χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα κορυφών που αντιστοιχούν σε πιθανά σημεία διέλευσης και συνδέοντας τις κορυφές με τόξα που αντιστοιχούν σε πιθανά τμήματα της πτήσης. Επιπλέον δε, στα μοντέλα που περιγράφονται λαμβάνονται υπόψη και μαθηματικοί περιορισμοί που αντιστοιχούν στο συνολικό χρόνο πτήσης, στα διαθέσιμα καύσιμα ή στους πιθανούς τύπους απειλών.

## 2.2. Εφαρμογή μοντελοποίησης για το πρόβλημα της μεταφοράς (transportation problem)

Στο πρόβλημα της μεταφοράς, το ζητούμενο είναι να καταρτιστεί το άριστο σχέδιο μεταφοράς κάποιας διαθέσιμης ποσότητας "προϊόντων", από κάποιες τοποθεσίες προς κάποιους προορισμούς, ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση κάθε προορισμού με το μικρότερο δυνατό συνολικό κόστος μεταφοράς. Το σχετικό κόστος μεταφοράς ανά προϊόν μπορεί να αντιπροσωπεύει την απόσταση, το χρόνο, το ρίσκο, τα απαραί-

τητα καύσιμα, ή οτιδήποτε άλλο θεωρείται σημαντικό.

Έστω για παράδειγμα, ότι ένας όγκος τεθωρακισμένων αρμάτων μάχης βρίσκεται μοιρασμένος σε δύο τοποθεσίες και πρέπει να προωθηθεί, με αρματοφορείς, το ταχύτερο δυνατόν σε τρεις διαφορετικούς προορισμούς. Σε κάθε οδική αρτηρία που συνδέει τις τοποθεσίες προέλευσης και προορισμού αντιστοιχεί και μια χιλιομετρική απόσταση, η οποία επηρεάζει και το συνολικό κόστος μετάβασης. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια του δικτύου του Σχήματος 2, το οποίο αποτελείται από πέντε κόμβους και έξι τόξα.




Σχήμα 2. Μοντελοποίηση με το πρόβλημα της μεταφοράς.

Οι δύο κόμβοι στο αριστερό μέρος αντιπροσωπεύουν τις τοποθεσίες όπου βρίσκεται συγκεντρωμένος ο όγκος των αρμάτων. Έστω, ότι στην τοποθεσία 1 υπάρχουν 600 άρματα και στην τοποθεσία 2 υπάρχουν 400 άρματα. Τα άρματα πρέπει να μεταφερθούν, όσο το δυνατόν πιο γρήγορα στους προορισμούς 1, 2 και 3. Για την ακρίβεια, υπάρχει ανάγκη για 300 άρματα στον προορισμό 1, 500 άρματα στον προορισμό 2 και τέλος 200 άρματα στον προορισμό 3.

Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί ένα πρόβλημα δικτυακής βελτιστοποίησης, όπου έχουμε m = 2 κόμβους "προσφοράς", n = 3 κόμβους "ζήτησης" και οι μεταβλητές απόφασης xij αντιπροσωπεύουν το πλήθος αρμάτων που μεταφέρονται με αρματοφορείς από την τοποθεσία i στην τοποθεσία j.

Το πρόβλημα θα μπορούσε να είναι αρκετά πιο σύνθετο, εάν λαμβάνονταν υπόψη και άλλοι περιορισμοί στον τρόπο μεταφοράς, π.χ. κάποιες τοποθεσίες συνδέονται μόνο μέσω αέρος ή μόνο μέσω θαλάσσης, συγκεκριμένα δρομολόγια αποκλείονται λόγω αυξημένου ρίσκου, κ.λ.π.

| | Κόστος μεταβάσης (σε καύσιμα) ανά τόξο (i,j) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Προορισμός 1 (1t) | Προορισμός 2 (1t) | Προορισμός 3 (1t) | Διαθέσιμα άρματα |
| Τοποθεσία 1 | 80 | 20 | 50 | 600 |
| Τοποθεσία 2 | 40 | 30 | 60 | 400 |
| Συνολική ζήτηση | 300 | 500 | 200 | |

Στον Πίνακα 2 εμφανίζεται το κόστος μεταφοράς, εκφρασμένο σε λίτρα καυσίμων, για καθένα από όλα τα πιθανά δρομολόγια.
Πίνακας 2. Στοιχεία ενός προβλήματος μεταφοράς.

Επειδή η συνολική προσφορά είναι ίση με τη συνολική ζήτηση, οι περιορισμοί της προσφοράς μπορούν να πάρουν τη μορφή ισότητας (ισορροπημένο πρόβλημα). Σε αυτήν την περίπτωση, το γραμμικό μοντέλο του προβλήματος μεταφοράς είναι το εξής:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{μ.π.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a(i), \quad i \in S$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b(j), \quad j \in D$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i \in S, \; j \in D$$

Το σύνολο S αντιπροσωπεύει το σύνολο {1,2} με τους κόμβους "προσφοράς", ενώ το σύνολο D αντιπροσωπεύει το

σύνολο {3,4,5} με τους κόμβους "ζήτησης". Τέλος με a(i) συμβολίζουμε την ποσότητα προσφοράς του i κόμβου, ενώ με b(i) συμβολίζουμε την ποσότητα ζήτησης του i κόμβου.

Για την επίλυση του προβλήματος της μεταφοράς, έχουν αναπτυχθεί διάφοροι αλγόριθμοι στη διεθνή βιβλιογραφία, π.χ. ο αλγόριθμος Παπαρρίζου που περιγράφεται στην εργασία [14]. Μετά την εφαρμογή ενός οποιοδήποτε αλγορίθμου, θα προέκυπτε η βέλτιστη λύση που περιγράφεται στον Πίνακα 3, με συνολικό κόστος 500*20 + 100*50 + 300*40 + 100*60 = 33.000 lt.

| | Προορισμός 1 | Προορισμός 2 | Προορισμός 3 | Διαθέσιμα άρματα |
|---|---|---|---|---|
| Τοποθεσία 1 | | 500 | 100 | 600 |
| Τοποθεσία 2 | 300 | | 100 | 400 |
| Συνολική ζήτηση | 300 | 500 | 200 | |

Πίνακας 3. Βέλτιστο πλάνο μεταφοράς του προηγούμενου παραδείγματος.

Στη λύση αυτή θα μπορούσε να φτάσει κάποιος είτε εφαρμόζοντας κάποιον αλγόριθμο για το παραπάνω πρόβλημα με το χέρι, είτε με τη βοήθεια κάποιου εξειδικευμένου λογισμικού πακέτου. Φυσικά τα πραγματικά προβλήματα είναι αρκετά πιο πολύπλοκα και σχεδόν πάντοτε, στηριζόμαστε στη χρήση Η/Υ. Η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος με τη χρήση ενός λογισμικού πακέτου, είναι συνήθως παρόμοια. Αρχικά το πρόβλημα πρέπει να μοντελοποιηθεί πρώτα σε μορφή κατάλληλη για χρήση σε κάποιο λογισμικό. Στη συνέχεια το πρόβλημα επιλύεται με εφαρμογή κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου (π.χ. μοντέλο μεταφοράς). Για παράδειγμα εάν είχαμε χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα WinQSB 2.0, θα παίρναμε την αναφορά αποτελεσμάτων του Σχήματος 3:

| | From | To | Shipment | Unit Cost | Total Cost | Reduced Cost |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Source 1 | Destination 2 | 500 | 20 | 10000 | 0 |
| 2 | Source 1 | Destination 3 | 100 | 50 | 5000 | 0 |
| 3 | Source 2 | Destination 1 | 300 | 40 | 12000 | 0 |
| 4 | Source 2 | Destination 3 | 100 | 60 | 6000 | 0 |
| | Total | Objective | Function | Value = | 33000 | |

Σχήμα 3. Εύρεση βέλτιστου πλάνου μεταφοράς με χρήση του λογισμικού πακέτου WinQSB, (screenshot).

Η μελέτη του προβλήματος της μεταφοράς, αλλά και άλλων αντικειμένων της Επιχειρησιακής Έρευνας όπως για παράδειγμα της θεωρίας αποθεμάτων έχει οδηγήσει στη δημιουργία ενός νέου επιστημονικού κλάδου με όνομα "Βελτιστοποίηση Εφοδιαστικής Αλυσίδας". Έχουν αναπτυχθεί πλέον και αρκετά εξειδικευμένοι φορείς με αντικείμενο τη βελτιστοποίηση της εφοδιαστικής αλυσίδας στον στρατό. Ένας από αυτούς για παράδειγμα είναι το Army Logistics Management College (http://www.almc.army.mil). Μάλιστα αυτός ο φορέας, εκδίδει και το περιοδικό Army Logistician (http://www.almc.army.mil/alog), όπου δημοσιεύονται σχετικές μελέτες.

## 2.3. Εφαρμογή μοντελοποίησης για το πρόβλημα της αντιστοίχισης (assignment problem)

Το πρόβλημα της αντιστοίχισης, ή αλλιώς ανάθεσης - εκχώρησης, αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς, όπου η προσφορά και η ζήτηση είναι μονάδες. Σε αυτήν την περίπτωση η κατανομή των πόρων γίνεται με αντιστοιχία ένα προς ένα. Το ζητούμενο είναι να εντοπιστεί η ιδανική αντιστοίχιση, με κριτήριο βελτιστοποίησης (συνήθως) την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους ή χρόνου. Το πρόβλημα θα μπορούσε να διατυπωθεί και με κριτήριο μεγιστοποίησης π.χ. κέρδους ή ικανοποίησης κ.α.

Έστω, για παράδειγμα ότι έχουμε 10 αξιωματικούς οι οποίοι θα εκτελέσουν 8 αποστολές. Ο αξιωματικός i όταν αναλαμβάνει την αποστολή j, την εκτελεί με βαθμό επιτυχίας cij. Ποιοι αξιωματικοί θα αναλάβουν ποιες αποστολές, έτσι ώστε ο βαθμός επιτυχίας όλων των αποστολών να είναι μέγιστος;

Στη μαθηματική μορφοποίηση το πλήθος των αξιωματικών ισούται με το πλήθος των αποστολών. Αν θέσουμε:

xij = 1, αν ο αξιωματικός i αναλάβει την αποστολή j
= 0, διαφορετικά,

μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα με την παρακάτω μαθηματική μορφή

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{μ.π.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι επίλυσης του προβλήματος της αντιστοίχισης, όπως για παράδειγμα ο Ουγγρικός αλγόριθμος [15], ή ο Αλγόριθμος Παπαρρίζου, (με πολυπλοκότητα O(n3)) [16]. Είναι σίγουρο (μαθηματικά αποδεικνύεται) ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος και να εφαρμοστεί, θα μας οδηγήσει στη βέλτιστη λύση. Σε αυτό το σημείο είναι καλό να επαναληφθεί το γεγονός ότι, αν ο αλγόριθμος τροφοδοτηθεί με λανθασμένα δεδομένα εισόδου (πιθανά λάθη στην εκτίμηση της αποτελεσματικότητας cij των αξιωματικών), τότε θα οδηγηθούμε σε λάθος αποτέλεσμα δίχως να ευθύνεται ο αλγόριθμος. Οπότε, πρέπει να γίνεται πάρα πολύ προσεκτικά η εκτίμηση οποιοδήποτε παραμέτρων συμμετέχουν στο πρόβλημα.

## 2.4. Εφαρμογή μοντελοποίησης για το πρόβλημα του δυαδικού σακιδίου (binary knapsack problem)

Στο πρόβλημα του δυαδικού σακιδίου προσπαθούμε να συσκευάσουμε ένα υποσύνολο αντικειμένων, από n συνολικά, σε ένα σακίδιο χωρητικότητας b. Σε κάθε j (από 1 έως n) αντικείμενο αντιστοιχεί ένα κέρδος cj και ένα βάρος wj. Το ζητούμενο είναι να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό κέρδος που αποκομίζουμε από το υποσύνολο των συσκευασμένων αντικειμένων δίχως να υπερβαίνουμε τη χωρητικότητα b του σακιδίου. Έστω, ότι με xj συμβολίζουμε τη δυαδική μεταβλητή απόφασης. Τότε, θα έχουμε ότι xj = 1 εάν το j-οστό αντικείμενο είχε επιλεχθεί, ενώ θα ισχύει xj = 0 στην αντίθετη περίπτωση. Το πρόβλημα του δυαδικού σακιδίου μπορεί να μορφοποιηθεί ως ένα 0-1 πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού (0-1 Integer Programming).

$$KP = \begin{cases} \text{μεγιστοποίηση} & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{με περιορισμούς} & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le b \\ & x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

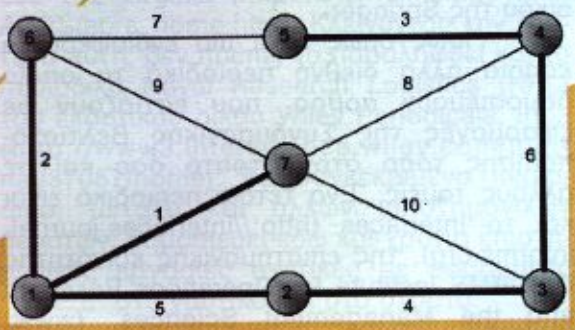
Στο παραπάνω παράδειγμα υποθέτουμε ότι όλα τα δεδομένα εισόδου b, ci και wi όπου i N, είναι μη αρνητικοί ακέραιοι (το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται και στην περίπτωση όπου δεν ισχύει αυτή η ιδιότητα). Το πρόβλημα του σακιδίου ανήκει στην κλάση των δυσεπίλυτων προβλημάτων (NP-hard) της Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης.

Σε ένα άρθρο των Brown G.G., Dell R.F. και Newman A.M. το 2004 [17], ερευνάται το πρόβλημα της μεγιστοποίησης των εσόδων του στρατού με κατάλληλη αξιοποίηση των πόρων που διαθέτει. Μάλιστα, το πιο απλό ίσως μαθηματικό μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αυτήν την περίπτωση, είναι αυτό του προβλήματος του δυαδικού σακιδίου. Σε αυτήν την περίπτωση μοντελοποιούμε κάθε πιθανή επιλέξιμη επένδυση με μια μεταβλητή απόφασης xj, ενώ το αναμενόμενο κέρδος κάθε επένδυσης με μια μεταβλητή cj. Τέλος, το διαθέσιμο κεφάλαιο του στρατού το μοντελοποιούμε με τη μεταβλητή b.

## 2.5. Εφαρμογή μοντελοποίησης για το πρόβλημα του ελάχιστου δένδρου καλύμματος (minimum spanning tree problem)

Το πρόβλημα του ελάχιστου δέντρου καλύμματος (ή ζευγνύοντος δέντρου) αφορά στη σύνδεση όλων των κόμβων, άμεσα ή έμμεσα, με το ελάχιστο δυνατό

συνολικό κόστος. Το κόστος μπορεί να αντιπροσωπεύει μήκος, κεφάλαια, χρόνο κ.α. Σε ένα δίκτυο με n κορυφές, το δένδρο κάλυμμα αποτελεί υπό-δίκτυο με n-1 ακμές, που συνδέει όλες τις κορυφές του δικτύου άμεσα ή έμμεσα χωρίς κύκλους. Ελάχιστο δένδρο κάλυμμα είναι εκείνο που εκτός από τα παραπάνω έχει επιπλέον και ελάχιστο συνολικό μήκος ακμών. Στο Σχήμα 4 απεικονίζεται δίκτυο με 7 κόμβους και 10 ακμές, όπου οι αριθμοί δίπλα σε κάθε ακμή αντιπροσωπεύουν το κόστος κάθε ακμής. Το ελάχιστο δένδρο κάλυμμα που αντιστοιχεί σε αυτό το δίκτυο αποτελείται μόνο από τις ακμές οι οποίες απεικονίζονται με έντονο χρώμα. Εφαρμογές αυτής της κατηγορίας προβλημάτων προκύπτουν στη σχεδίαση μεταφορικών ή/και τηλεπικοινωνιακών δικτύων.




Σχήμα 4. Παράδειγμα ελάχιστου δένδρου καλύμματος.

Μια στρατιωτική εφαρμογή του προβλήματος του ελάχιστου δέντρου καλύμματος περιγράφεται στην εργασία [18]. Αυτή η εργασία παρουσιάστηκε στο ετήσιο Διεθνές Συνέδριο Στρατιωτικών Επικοινωνιών (Military Communications Conference - http://www.milcom.org). Στην εργασία αυτή, αντικείμενο μελέτης είναι η ανάπτυξη αλγορίθμων για ενεργειακά αποδοτική μετάδοση πληροφοριών (energy efficient multicasting in military wireless networks) σε ασύρματα στρατιωτικά δίκτυα. Σε ειδικές αποστολές μεμονωμένων ατόμων, είναι δυνατόν ο κάθε στρατιώτης να φέρει μαζί του και ηλεκτρονικές συσκευές δικτύωσης με την υπόλοιπη ομάδα. Σε τέτοιου είδους δίκτυα, σημαντικό ρόλο στην τελική έκβαση της επιχείρησης παίζει και η περιορισμένη διάρκεια της μπαταρίας της ηλεκτρονικής συσκευής. Ένας τέτοιος περιορισμός, είναι ζωτικής σημασίας διότι ίσως είναι αδύνατον να επαναφορτιστεί η μπαταρία κατά τη διάρκεια της αποστολής. Ως εκ τούτου, υπάρχει ανάγκη σχεδίασης τεχνικών δικτύωσης, οι οποίες κάνουν αποδοτική χρήση της περιορισμένης διαθέσιμης ενέργειας, ενώ ταυτόχρονα λαμβάνουν υπόψη τις ιδιότητες ενός ασύρματου περιβάλλοντος δικτύωσης. Κατά την επίλυση του προβλήματος, προκύπτει συχνά η ανάγκη προσδιορισμού ενός ελάχιστου δένδρου καλύμματος από τον κόμβο μετάδοσης προς όλους τους υπολοίπους κόμβους του δικτύου.

## 3. Επιστημονικοί φορείς Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης

Υπάρχουν διάφοροι Επιστημονικοί φορείς Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης σε όλο τον κόσμο. Όσον αφορά την Ευρώπη, πιο γνωστή είναι ίσως η ομάδα εργασίας της EURO με τίτλο ECCO European Chapter on Combinatorial Optimization, (EURO Working Group on Combinatorial Optimization). Ο επίσημος ιστοχώρος της επιστημονικής ομάδας ECCO είναι στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://www.g-scop.fr/ECCO. Όλοι οι αντίστοιχοι ερευνητικοί φορείς, διοργανώνουν επιστημονικά συνέδρια και ημερίδες. Η ομάδα εργασίας ECCO συνδιοργανώνει φέτος το 21ο Διεθνές Συνέδριο του European Chapter on Combinatorial Optimization (ECCO XXI), στις 29-31 Μαΐου 2008, στο Dubrovnik, της Κροατίας (http://www.efzg.hr/eccoxxi). Άλλο γνωστό συνέδριο με το ίδιο γνωστικό αντικείμενο είναι και το 2ο Ετήσιο Διεθνές Συνέδριο στην Συνδυαστική Βελτιστοποίηση και τις εφαρμογές (COCOA'08) το οποίο θα διεξαχθεί στις 21-24 Αυγούστου 2008, στον Καναδά (http://www.cs.uregina.ca/cocoa08). Πρέπει να αναφερθεί το γεγονός ότι άλλοι επιστημονικοί φορείς οργανώνουν επισκέψεις σε στρατιωτικούς ερευνητικούς φορείς για ανταλλαγή τεχνογνωσίας. Για παράδειγμα, η Επιστημονική ένωση Επιχειρησιακής Έρευνας της Σιγκαπούρης, το 2007 είχε επισκεφθεί για συνεργασία, το SAF Centre for Military Experimentation.

(http://sunsite.nus.sg/ORSS/activities-visit26012007.pdf ). Επιπλέον δε, υπάρχουν και μεταπτυχιακά προγράμματα σπουδών, τα οποία εμβαθύνουν στην Στρατιωτική Επιχειρησιακή Έρευνα. Ένα παράδειγμα είναι στο Πανεπιστήμιο George Mason στη Βιρτζίνια των Η.Π.Α., όπου υπάρχει μεταπτυχιακό πρόγραμμα με τίτλο Military Operational Research και υπάρχει δυνατότητα λήψης των τίτλων MSc/PgDip/PgCert. Ο ιστοχώρος του παραπάνω μεταπτυχιακού προγράμματος είναι ο (http://www.seor.gmu.edu/msor/military.html)

Τέλος, πολλοί επιστημονικοί φορείς Επιχειρησιακής Έρευνας έχουν συμμετάσχει από κοινού σε ερευνητικά προγράμματα, με στόχο την εφαρμογή μεθόδων Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης σε στρατιωτικές εφαρμογές. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ήταν και το ερευνητικό πρόγραμμα με τίτλο CALMA: Combinatorial ALgorithms for Military Applications (http://www.win.tue.nl/~wscor/ calma.html). Αυτό το πρόγραμμα είχε χρηματοδοτηθεί από τα Υπουργεία Αμύνης της Ολλανδίας, Γαλλίας και της Μεγάλης Βρετανίας, στα πλαίσια του ευρωπαϊκού προγράμματος EUCLID (EUropean Cooperation for the Long term In Defence). Στόχος του προγράμματος CALMA, ήταν η μελέτη της εφαρμογής αλγορίθμων Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης σε διάφορα πραγματικά στρατιωτικά προβλήματα, όπως ανάθεση όπλων σε στόχους (Weapons to Threats Assignment), διαχείριση ραντάρ για έλεγχο εναέριας κυκλοφορίας (Radar Management for Air Traffic Control), Terrain High Points Assignment, και ανάλυση εικόνας (Image Analysis). Τελικά οι συμμετέχοντες ομάδες από όλα τα παραπάνω προβλήματα, επέλεξαν να επικεντρώσουν τις προσπάθειες τους στο πρόβλημα ανάθεσης συχνότητας για ραδιοφωνική σύνδεση (Radio Link Frequency Assignment Problem), βλέπε [19]. Στον ιστοχώρο (FTP archive) του Τμήματος Μαθηματικών και Επιστήμης Υπολογιστών, του Πανεπιστημίου του Αΐντχόβεν στην Ολλανδία, (ftp://ftp.win.tue.nl/pub/techreports/CALMA/index.html) υπάρχουν τεχνικές αναφορές που περιγράφουν τα επιστημονικά αποτελέσματα του προγράμματος, συνοπτικά αναφέρονται οι εργασίες [20], [21] και [22], αλλά και αρχεία προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν σε υπολογιστικές μελέτες. Τα ερευνητικά τους αποτελέσματα παρουσιάστηκαν σε στρατιωτικούς εκπρόσωπους, αλλά και σε άλλες ερευνητικές ομάδες και εταιρίες μέσω ενός διεθνούς συνεδρίου την 24η Νοεμβρίου 1995, στο Scheveningen της Ολλανδίας.

## 4. Πηγές ενημέρωσης

Υπάρχουν πολλά επιστημονικά βιβλία που μελετούν την εφαρμογή μοντέλων βελτιστοποίησης σε στρατιωτικές εφαρμογές. Επίσης υπάρχουν και αρκετά επιστημονικά περιοδικά που ασχολούνται με τη μοντελοποίηση αλλά και τη Συνδυαστική Βελτιστοποίηση. Ένα από τα πιο γνωστά περιοδικά είναι και το Journal of Combinatorial Optimization, (http://www. springer-link.com/content/ 102924), του εκδοτικού οίκου της Springer.

Ίσως όμως είναι πιο ενδιαφέροντα κάποια άλλα διεθνή περιοδικά τα οποία δημοσιεύουν άρθρα, που εστιάζουν σε εφαρμογές της Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης τόσο στον στρατό όσο και σε άλλους τομείς. Ένα τέτοιο περιοδικό είναι και το Interfaces (http://interfaces.journal. informs.org), της επιστημονικής κοινότητας INFORMS Institute for Operations Research and the Management Sciences, (www. informs.org). Σε αυτό το περιοδικό δημοσιεύονται συχνά μελέτες περιπτώσεων και κάποιες από αυτές αφορούν και σε στρατιωτικές εφαρμογές. Ενδεικτικά μπορεί να αναφερθεί το άρθρο [23] των Sabuncuoglu I. και Hatip A. όπου περιγράφεται η χρήση τεχνικών προσομοίωσης για τη μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση της εφοδιαστικής αλυσίδας των καυσίμων του Τουρκικού στρατού. Άλλη ενδιαφέρουσα εργασία είναι και η [24], στην οποία αναλύεται η χρήση μοντέλων δικτυακής βελτιστοποίησης για τη βέλτιστη ανάθεση πεδίων καριέρας σε αξιωματικούς του Αμερικανικού στρατού.

Δημοσιεύονται επίσης και ειδικά τεύχη περιοδικών Επιχειρησιακής Έρευνας, αφιερωμένα σε αντικείμενα στρατιωτικών εφαρμογών. Ένα τέτοιο ειδικό τεύχος ήταν και το Special Issue: "OR Applications in the Military and in Counter-Terrorism", του περιοδικού Computers & Operations Resea-

rch, Elsevier Ltd., vol. 35, issue 6, pp. 1757 - 2128, το οποίο δημοσιεύτηκε τον Ιούνιο του 2008. Μεταξύ αρκετών ενδιαφερόντων άρθρων ήταν και η εργασία [25], στην οποία περιγράφεται η χρήση μοντέλων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού για τη βέλτιστη κατανομή - ανάθεση πυραύλων εναέριας άμυνας προς αναχαίτιση εχθρικών πυραύλων αέρος, με στόχο τη μεγιστοποίηση της αποτελεσματικότητας της εναέριας άμυνας μιας νηοπομπής.

Επιπλέον σε άλλα κράτη γίνονται και εξειδικευμένα συνέδρια όπως το ετήσιο Army Operations Research Symposium (AORS), με στόχο την ανταλλαγή ιδεών μεταξύ Αμερικανών στρατιωτικών αναλυτών - επιχειρησιακών ερευνητών. Το 47ο (επόμενο) συνέδριο πρόκειται να διεξαχθεί τον ερχόμενο Οκτώβριο 15-16, 2008, στο Fort Lee της Virginia (http://www.almc.army.mil/AORS/aors_home.htm). Κλείνοντας την ενότητα αυτή, δεν πρέπει να παραληφθεί και το περιοδικό Naval Research Logistics (NRL) του εκδοτικού οίκου Wiley Periodicals, Inc., (http://www3.interscience.wiley.com/journal/37057/home). Το συγκεκριμένο περιοδικό, μεταξύ και άλλων επιστημονικών θεμάτων, δημοσιεύει εδώ και χρόνια επιστημονικές εργασίες σχετικές με εφαρμογές της Ε.Ε. στο ναυτικό και στο στρατό.

## 5. Επίλογος - Προτάσεις

Μπορεί κανείς πραγματικά να δει μια πληθώρα στρατιωτικών εφαρμογών να μοντελοποιούνται με μαθηματικά μοντέλα Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης. Για την επίλυση των προβλημάτων των προηγουμένων ενοτήτων, έχουν αναπτυχθεί πάρα πολλά αξιόλογα λογισμικά πακέτα. Μερικά από τα πιο γνωστά είναι και το λογισμικό πακέτο - γλώσσα μοντελοποίησης AMPL. Με την γλώσσα AMPL, είναι δυνατόν να κατασκευαστούν και να επιλυθούν διάφορα μοντέλα γραμμικού, μη - γραμμικού, ακεραίου προγραμματισμού, κ.α. Τέλος, άλλα γνωστά λογισμικά πακέτα είναι και το προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB, το οποίο ενσωματώνει και το υπό-πακέτο Matlab Optimization Toolbox, το οποίο βρίσκεται στην έκδοση 3.1.1., (http://www.mathworks.com/products/optimization). Το συγκεκριμένο υπό-πακέτο περιέχει υλοποιημένους λύτες για προβλήματα Γραμμικής Βελτιστοποίησης, Μη-Γραμμικής Βελτιστοποίησης, Πολυκριτήριας Βελτιστοποίησης, Ακεραίου προγραμματισμού, κ.α. Λόγω της πληθώρας πολλών και αποτελεσματικών, ανταγωνιστικών προγραμμάτων, ενδεικτικά αναφέρουμε ακόμη και το λογισμικό KNITRO, το οποίο βρίσκεται στην έκδοση 5.1, (http://www.ziena.com/knitro.htm). Αυτό το λογισμικό πακέτο προσφέρεται για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού, Μη Γραμμικού, Τετραγωνικού προγραμματισμού, κ.α. Επιπλέον δε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως λύτης σε άλλα προγραμματιστικά περιβάλλοντα, όπως για παράδειγμα τα AMPL, AIMMS, Mathematica, Microsoft Excel, GAMS, LabVIEW και MATLAB.

Τέλος, πιστεύουμε ότι είναι απαραίτητο να γίνει πιο έντονη η σύνδεση των ερευνητικών κέντρων στην Ελλάδα με στρατιωτικούς φορείς με στόχο τη μεγαλύτερη αξιοποίηση του επιστημονικού μας δυναμικού. Αξίζει να αναφερθεί ότι άλλες επιστημονικές ενώσεις χρηματοδοτούν την έρευνα αιχμής με υποτροφίες. Για παράδειγμα, υπάρχει η υποτροφία από την Military Applications Society προς τιμή του Seth Bonder. Η υποτροφία αυτή έχει ως στόχο να αναδείξει ερευνητές στο αντικείμενο της εφαρμοσμένης Επιχειρησιακής Έρευνας σε στρατιωτικές εφαρμογές (http://www.informs.org/index.php?c=557&kat=MAS%3A+Bonder+Scholarship) και ανέρχεται στις 5.000 $.

## *Αναφορές*

*[1] Μηλιώτης Π.Α. (1994a), Επιχειρησιακή Έρευνα - Μέθοδοι και Προβλήματα, Εκδόσεις Σταμούλης Α., Αθήνα - Πειραιάς.*

*[2] Lieberman H. (2005), Introduction to Operations Research, 8th ed., McGraw-Hill.*

*[3] Μηλιώτης Π.Α. (1994b), Συνδυαστική Βελτιστοποίηση, Εκδόσεις Σταμούλης Α., Αθήνα - Πειραιάς.*

*[4] Lee J. (2004), A First Course in Combinatorial Optimization, Cambridge University Press, New York.*

*[5] Hoffman K. (2000), "Combinatorial optimization: Current successes and directions for the future", Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier B.V.,*

124(1-2), 341-360.
[6] Balintfy J. (1976), "A Mathematical Programming System for Food Management Applications", Interfaces, INFORMS Publications, 6(1), 13-31.
[7] Γεωργίου Α.Κ., Οικονόμου Γ.Σ. και Τσιότρα Γ.Δ. (2006), Μελέτες Περιπτώσεων Επιχειρησιακής Έρευνας, τόμος Α, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.
[8] Williams H.P. (1999), Model Building in Mathematical Programming, 4th ed., Wiley.
[9] Ahuja, R.K., Magnanti, T. L., Orlin, J.B. and Reddy, M.R. (1995), "Applications of Network Optimization". In Ball M.O., Magnanti T.L., Monma C.L. and Nemhauser G.L. (Eds.) Handbooks of Operations Research and Management Science, Network Models, Elsevier Publications, 7, 1-83.
[10] Παπαρρίζος Κ, Σαμαράς Ν. και Σιφαλέρας Α. (2008), "Δικτυακή Βελτιστοποίηση", υπό έκδοση, Θεσσαλονίκη.
[11] Johnson D.B. (1977), "Efficient Algorithms for Shortest Paths in Sparse Networks", Journal of the ACM, 24(1), 1-13.
[12] Zabarankin M., Uryasev S., Murphey R. (2006), "Aircraft routing under the risk of detection", Naval Research Logistics, Wiley Periodicals, Inc., 53(8), 728-747.
[13] Carlyle W.M., Royset J.O. and Wood R.K. (2007), "Routing Military Aircraft with a Constrained Shortest-Path Algorithm", Naval Postgraduate School, paper in review.
[14] Paparrizos K. (1996), "A non improving simplex algorithm for transportation problems", RAIRO Operations Research, EDP Sciences, 30(1), 1-15.
[15] Kuhn H. (1955), "The Hungarian Method for the Assignment Problem", Naval Research Logistics Quarterly, 2(1-2), 83-97.
[16] Paparrizos K. (1991), "An infeasible (exterior point) simplex algorithm for assignment problems", Mathematical Programming, Springer-Verlag, 51(1), 45-54.
[17] Brown G.G., Dell R.F. and Newman A.M. (2004), "Optimizing Military Capital Planning", Interfaces, INFORMS Publications, 34, 415-425.
[18] Wieselthier J.E., Nguyen G.D. and Ephremides A. (1999), "Algorithms for energy-efficient multicasting in ad hoc wireless networks", Military Communications Conference Proceedings (MILCOM 1999), IEEE Publications, 2, 1414-1418.
[19] Aardal K., Hurkens C., Lenstra J.K. and Tiourine S. (2002), "Algorithms for Radio Link Frequency Assignment: The Calma Project", Operations Research, INFORMS Publications, 50(6), 968-980.
[20] Toet A. and Waard H. (1994), "The Weapon-Target Assignment Problem", CALMA Technical Report CALMA.TNO.WP31.AT.95c.
[21] Toet A. and Waard H. (1995), "The Multitarget/Multisensor Tracking Problem", CALMA Technical Report CALMA.TNO.-WP31.AT.95d.
[22] Toet A. (1995), "Combinatorial Optimization and Image Analysis: a literature survey, CALMA Technical Report, CALMA.TNO.-WP31.AT.95a.
[23] Sabuncuoglu I. and Hatip A. (2005), "The Turkish Army Uses Simulation to Model and Optimize Its Fuel-Supply System", Interfaces, INFORMS Publications, 35, 474-482.
[24] Shrimpton D. and Newman A.M. (2005), "The US Army Uses a Network Optimization Model to Designate Career Fields for Officers", Interfaces, INFORMS Publications, 35, 230-237.
[25] Karasakal O. (2008), "Air defense missile-target allocation models for a naval task group", Computers & Operations Research, 35(6), Elsevier Ltd., Part Special Issue: OR Applications in the Military and in Counter-Terrorism, 1759-1770.